

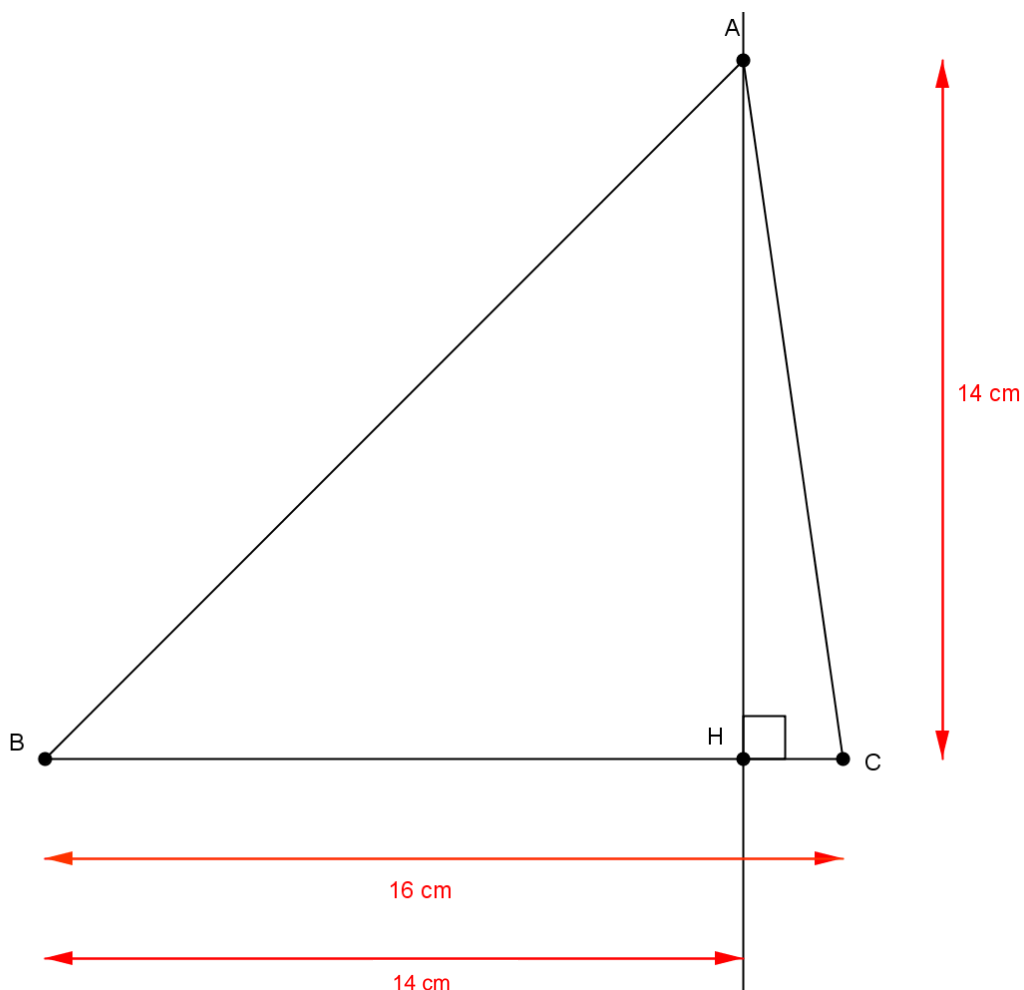
**Proposition de corrigé du sujet de mathématiques du concours blanc n° 2 donné à l'IUFM d'Alsace le 26 janvier 2010**

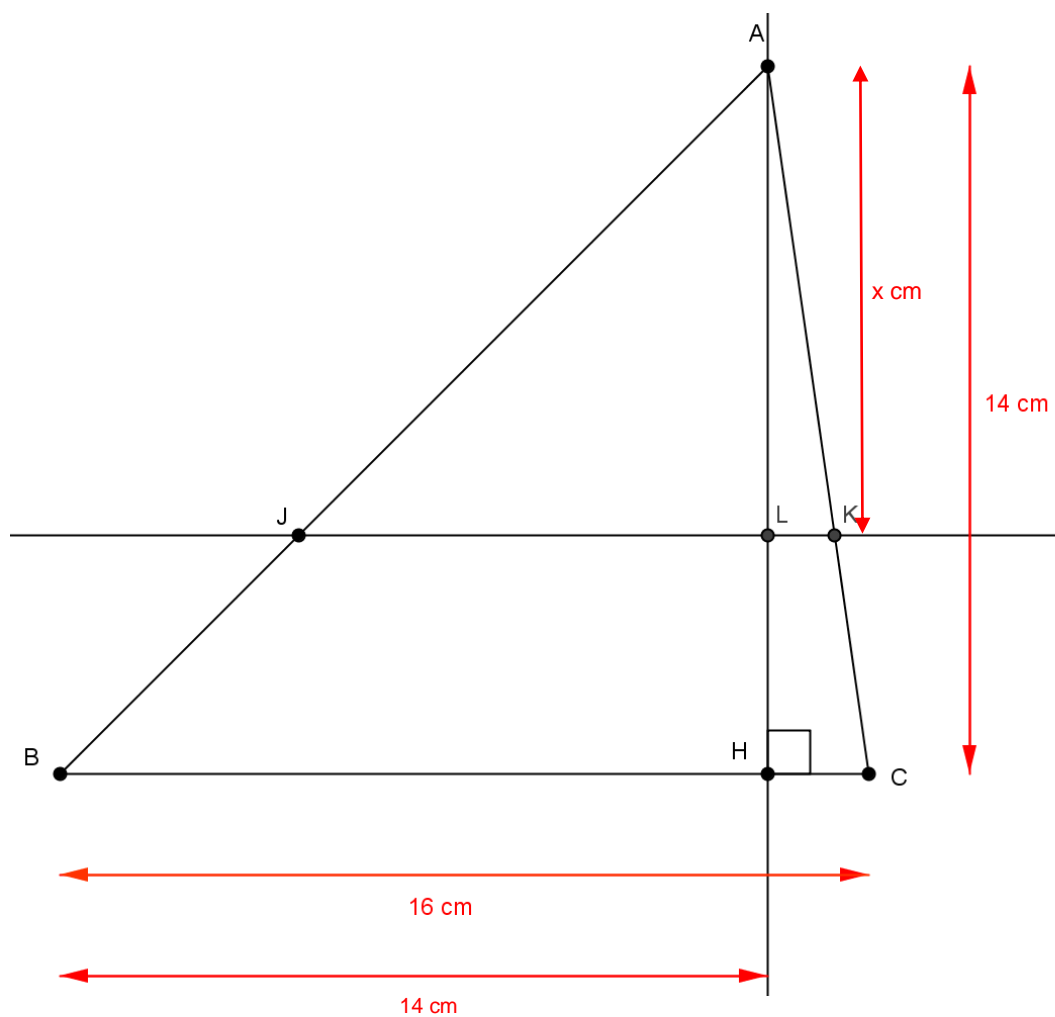
**Exercice 1 (5 points)** (1 point par question)

1) Le triangle ABH étant isocèle et rectangle en H, on en déduit que  $BH = AH = 14$ .

D'où un programme de construction possible :

- Tracer un segment [BC] de longueur 16 cm.
- Placer sur ce segment le point H tel que  $BH = 14$  cm.
- Tracer la droite d perpendiculaire à la droite (BC) en H.
- Placer sur la droite d un point A situé à 14 cm de H.
- Tracer les segments [AB] et [AC].





2°)

Les droites (JK) et (BC) sont parallèles et (AH) est perpendiculaire à (BC) donc (AH) est aussi perpendiculaire à (JL) donc le triangle AJL est un triangle rectangle en L.

De plus, l'angle  $\widehat{JAL}$  mesure  $45^\circ$  (car le triangle BHA est un triangle rectangle en H).

On en déduit donc que **AJL est un triangle isocèle et rectangle en L.**

3°)

D'après le théorème de Thalès,  $\frac{AL}{AH} = \frac{AK}{AC}$  et  $\frac{AK}{AC} = \frac{JK}{BC}$  donc  $\frac{AL}{AH} = \frac{JK}{BC}$

$$\text{Donc : } JK = \frac{BC \times AL}{AH} = \frac{16x}{14} = \frac{8x}{7}.$$

4°)

$$\text{Aire (AJK)} = \frac{AL \times JK}{2} = \frac{x \times \frac{8x}{7}}{2} = \frac{8x^2}{14} = \frac{4}{7}x^2$$

$$5^\circ) \text{ Aire (AJK)} = \frac{1}{4} \times \text{Aire (ABC)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{7}x^2 = \frac{1}{4} \times \frac{AH \times BC}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{7}x^2 = \frac{1}{4} \times \frac{14 \times 16}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{7}x^2 = 28 \Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = 7 \text{ (car } x \geq 0 \text{)}$$

### Question complémentaire (3 points)

1) (2 points par élève)

Elèves	Procédures	Erreurs
A	Cherche le nombre de carreaux en effectuant le produit "nombre de carreaux en longueur par nombre de carreaux en largeur".	Ne dénombre pas correctement le "nombre de carreaux en longueur" et "le nombre de carreaux en largeur" (il compte tous les carreaux "qui touchent" et obtient à chaque fois deux carreaux de trop).
B	Cherche le nombre de carreaux en ajoutant "le nombre de carreaux en longueur" et "le nombre de carreaux en largeur".	L'élève n'utilise pas la bonne opération (ce qu'il trouve correspond, en fait, au périmètre du rectangle).
C	L'élève perçoit les 9 colonnes de 5 carreaux cachées. Il écrit le nombre total de carreaux sous la forme d'une addition itérée puis traduit cette addition par une multiplication.	Pas d'erreur.
D	L'élève calcule le nombre de carreaux cachés en enlevant au nombre total de carreaux (trouvé à l'aide d'une procédure multiplicative) le nombre de carreaux visibles (trouvé en réalisant mentalement une partition).	Erreur de retenue dans "l'addition à trou" finale.

2°) (0,5 point)

Le maître peut faire en sorte que l'élève comprenne qu'il a fait une erreur

- en donnant à cet élève un quadrillage sur transparent (identique au quadrillage de l'énoncé) que l'élève pourra superposer au dessin de l'énoncé et sur lequel il pourra cocher les carreaux "cachés" devenus apparents pour pouvoir les dénombrer

et/ou

- en demandant à l'élève de colorier des rectangles "de 9 carreaux sur 5 carreaux" puis de dénombrer par comptage les carreaux coloriés puis de comparer le résultat trouvé et la somme  $9 + 5 + 9 + 5$ .

3°) (0,5 point) Au cours du cycle 3, on peut trouver des problèmes semblables dans les chapitres suivants :

- **Calcul sur des nombres entiers** (résolution de problèmes relevant des quatre opérations au CE2)

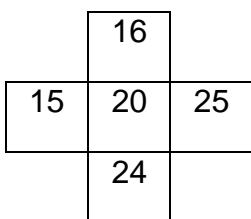
- **Grandeurs et mesures** (notion d'aire au CM1 et formule permettant de calculer l'aire d'un rectangle au CM2)

### Exercice 2 ( 3 points)

1°) (0,5 point)  $\frac{S}{C} = \frac{28 + 42 + 30 + 40}{35} = \frac{140}{35} = 4$

2°) (0,5 point)

Croix choisie :



$$\frac{S}{C} = \frac{16 + 24 + 15 + 25}{20} = \frac{80}{20} = 4$$

On observe que  $\frac{S}{C}$  vaut encore 4 pour cette deuxième croix choisie au hasard.

3°) (2 points)

Une croix quelconque choisie dans le tableau de multiplication donné est du type :

	$c \times (l-1)$	
$(c-1) \times l$	$c \times l$	$(c+1) \times l$
	$c \times (l+1)$	

(c est un nombre entier qui peut varier de 2 à 9 et qui indique la position de la colonne dans laquelle figure le terme central de la croix ; l est un nombre entier qui peut varier de 2 à 9 et qui indique la position de la ligne dans laquelle figure le terme central de la croix)

Calculons  $\frac{S}{C}$  :

$$\frac{S}{C} = \frac{c \times (l-1) + c \times (l+1) + (c-1) \times l + (c+1) \times l}{c \times l} = \frac{c \times l - c + c \times l + c + c \times l - l + c \times l + l}{c \times l} = \frac{4 \times c \times l}{c \times l} = 4$$

**Donc, quelle que soit la croix choisie dans le tableau de multiplication donné, le rapport  $\frac{S}{C}$  est toujours égal à 4.**

**Questions complémentaires (5 points)**

**1)a)** (0,5 point) Dans les programmes en vigueur (juin 2008), la multiplication est une opération qui s'introduit au cycle 2. Les activités présentées dans les annexes visent l'introduction de l'écriture multiplicative (comme écriture économique de l'addition itérée) ; elle se fait généralement au **CE1**. La nature des problèmes et la taille des nombres utilisés ici sont adaptées à ce niveau scolaire.

**b)** (1 point) Réponses possibles (on demandait au moins quatre propriétés) :

La multiplication

- est une opération **commutative** [pour tout entier n et tout entier p,  $p \times n = n \times p$ ]
- est une opération **associative**  
[pour tout entier m, tout entier n et tout entier p,  $m \times (n \times p) = (m \times n) \times p$ ]
- est une opération **distributive par rapport à l'addition**  
[pour tout entier m, tout entier n et tout entier p,  $m \times (n + p) = (m \times n) + (m \times p)$ ]
- est une opération **distributive par rapport à la soustraction**  
[pour tout entier m, tout entier n et tout entier p,  $m \times (n - p) = (m \times n) - (m \times p)$ ]
- **admet comme élément neutre le nombre 1** [pour tout entier n,  $1 \times n = n$ ]
- **admet comme élément absorbant le nombre 0** [pour tout entier n,  $0 \times n = 0$ ].

### c) (0,5 point) **Analyse de l'annexe 3**

La commutativité apparaît immédiatement. En effet, dans le document de l'annexe 3, le produit  $4 \times 5$  (ou  $5 \times 4$ ) apparaît comme le nombre d'éléments d'une grille rectangulaire de 4 lignes sur 5 colonnes.

Savoir que la multiplication est associative ne relève pas du niveau CE1.

Remarque : l'associativité de la multiplication apparaît de façon implicite dans l'exercice 2 de la fiche 58 [ $(4 \times (2 \times 3))$  et  $(4 \times 2) \times 3$ ] mais il n'est pas question de confronter l'élève à cette propriété.

Les trois autres propriétés n'apparaissent pas dans ce document.

Remarque : l'usage de grilles rectangulaires peut être intéressant pour faire apparaître ce que donne une multiplication par le nombre 1 et pour utiliser la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication.

### **Analyse de l'annexe 4**

La commutativité apparaîtra lors de la mise en commun des diverses tours : avec 30 cubes, on peut construire 5 tours de 6 cubes (5 fois 6 cubes) ou 6 tours de 5 cubes (6 fois 5 cubes).

Remarque : la situation pourrait aussi permettre d'illustrer ensuite la notion de distributivité [5 tours de  $(6 + 3)$  cubes chacune c'est 5 tours de 6 cubes chacune et 5 tours de 3 cubes chacune].

2°) (1 point) Sur l'ensemble du document, l'élève doit

- lire les informations fournies
- compléter des « blancs » en cherchant à comprendre la (les) réponse(s) qu'on attend de lui
- colorier des cases de quadrillages
- comprendre une synthèse (haut de la fiche 59)
- appliquer le « modèle » qu'on lui donne

3°)

a) (1 point) Pour résoudre le problème de façon experte (donc pas accessible à un élève de CE1), il faut trouver toutes les décompositions possibles de 30 en un produit de deux facteurs (en tenant compte de l'ordre de ces facteurs).

Ce qui donne :  $1 \times 30$  ;  $30 \times 1$  ;  $2 \times 15$  ;  $15 \times 2$  ;  $3 \times 10$  ;  $10 \times 3$  ;  $5 \times 6$  ;  $6 \times 5$ .

**Le problème admet donc huit solutions : une tour de 30 cubes, trente tours de 1 cube, quinze tours de 2 cubes, deux tours de 15 cubes, trois tours de 10 cubes, dix tours de 3 cubes, cinq tours de 6 cubes et six tours de 5 cubes.**

b) (1 point)

Exemples de variables didactiques de la situation (on en demande deux seulement) :

- **Le nombre de cubes** : il doit être suffisamment grand, et posséder un nombre de diviseurs suffisant pour permettre plusieurs décompositions multiplicatives sous forme de produit de deux facteurs ;

- **La disponibilité ou non des cubes** : non disponibles dans la phase de recherche présentée ici (les cubes sont posés sur le bureau - la situation est connue) ; s'ils étaient disponibles dans la phase de recherche, ce ne serait qu'un exercice de manipulation avec essais et ajustements successifs (le matériel peut être utilisé pour la validation des solutions);

- **La disponibilité ou non de la calculatrice** : ici présente, pour permettre aux élèves de vérifier plus rapidement que leur somme convient. Ils peuvent alors se concentrer davantage sur le problème de la recherche de toutes les solutions. Ils pourront découvrir l'intérêt de la touche « fois » lors de la mise en commun.

### Exercice 3

1°) (1 point) (on demandait deux méthodes)

**Première méthode :**

Une fraction  $\frac{a}{b}$  représente un nombre décimal quand on peut trouver des nombres entiers

c et d tels que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{10^d}$ .

**Deuxième méthode :**

Une fraction  $\frac{a}{b}$  représente un nombre décimal quand la fraction irréductible représentant

le même nombre admet un dénominateur de la forme  $2^p \times 5^q$  (avec p et q entiers positifs ou nuls).

**Troisième méthode :**

Une fraction  $\frac{a}{b}$  représente un nombre décimal quand le quotient décimal de la division de a par b admet une représentation décimale ayant un nombre fini de chiffres.

2°) (1 point)

$\frac{54}{1350} = \frac{1}{25}$   $\frac{1}{25}$  est une fraction irréductible et  $\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}$  donc  $\frac{54}{1350}$  **représente un nombre décimal.**

$\frac{5}{700} = \frac{1}{140}$   $\frac{1}{140}$  est une fraction irréductible et  $\frac{1}{140} = \frac{1}{2^2 \times 5 \times 7}$  donc  $\frac{5}{700}$  ne représente pas un nombre décimal.

$\frac{17}{1024}$  est une fraction irréductible et  $\frac{17}{1024} = \frac{17}{2^{10}}$  donc  $\frac{17}{1024}$  représente un nombre décimal.

$\frac{50}{1375} = \frac{2}{55}$   $\frac{2}{55}$  est une fraction irréductible et  $\frac{2}{55} = \frac{2}{5 \times 11}$  donc  $\frac{50}{1375}$  ne représente pas un nombre décimal.

3°) (0,5 point)  $\frac{n}{1050} = \frac{n}{2 \times 5^2 \times 3 \times 7}$  donc  $\frac{n}{1050}$  représente une fraction décimale quand n est un multiple de 21 (car lorsqu'on simplifie la fraction on doit trouver une fraction irréductible de la forme  $2^p \times 5^q$  avec p et q entiers positifs ou nuls).

4°) (0,5 point)  $1000a - a = 123,123 - 0,123$  donc  $999a = 123$  donc  $a = \frac{123}{999}$  donc

$$a = \frac{41}{333} \text{ (fraction irréductible)}$$

5°) (1 point)

a) Se demander si  $\frac{342}{27777500}$  et  $\frac{41}{3330000}$  représente ou pas le même nombre c'est se demander si  $342 \times 3330000$  est égal ou pas à  $41 \times 27777500$ .

Or  $342 \times 3330000 = 1\,138\,860\,000$  et  $41 \times 27777500 = 1\,138\,877\,500$  donc  $\frac{342}{27777500}$  et

$\frac{41}{3330000}$  ne représentent pas le même nombre.

b)  $\frac{342}{27777500} = \frac{342}{277775} \times 10^{-2} \approx 0,00123121 \times 10^{-2} \approx 0,0000123121$  (valeur approchée à  $10^{-10}$  près)

et  $\frac{41}{3330000} = \frac{41}{333} \times 10^{-4} \approx 0,123123123 \times 10^{-4} \approx 0,0000123123$  (valeur approchée à  $10^{-10}$  près)

Donc  $\frac{342}{27777500}$  et  $\frac{41}{3330000}$  ne représentent pas le même nombre.

Remarque : on peut démontrer (mais, pour ce faire, lire les valeurs approchées affichées par une calculatrice ne suffit pas) que :

$$\frac{342}{27777500} = 0,000012312 \quad \text{et} \quad \frac{41}{3330000} = 0,0000123$$