

Proposition de corrigé du sujet de mathématiques
(Concours blanc n°1 IUFM d'Alsace 12 décembre 2009)

Exercice 1 (5 points)

1°) (0,5 point) Le plus petit nombre N possible est obtenu en prenant la plus petite valeur possible pour m puis c puis d puis u. **Il s'agit donc du nombre 4321.**

2°) (0,5 point) Le plus grand nombre N possible est obtenu en prenant la plus grande valeur possible pour m puis c puis d puis u. **Il s'agit donc du nombre 9876.**

3°) (0,5 point) Liste des nombres N pour lesquels $m = 6$:
6543, 6542, 6541, 6532, 6531, 6521, 6432, 6431, 6421, 6321

4°) (1 point) $D = N - N' = (1000m + 100c + 10d + u) - (1000u + 10c + 100d + m) =$
 $1000m + 100c + 10d + u - 1000u - 10c - 100d - m =$ **999m + 90c - 90d - 999u**

5°) (0,5 point) $D = 9 \times (111m + 10c - 10d - 111u)$
m, u, d et c étant des nombres entiers, $111m + 10c - 10d - 111u$ est un nombre entier.
Donc **D est divisible par 9.**

Remarque : On peut ajouter que $m - u$ et $c - d$ sont positifs car $m > u$ et $c > d$ et en déduire que $111m + 10c - 10d - 111u$ est un entier naturel mais ce n'est pas indispensable car la notion de divisibilité est définie dans $\mathbb{Z}$.

6°) (0,5 point + 0,5 point) $D = 999(m - u) + 90(c - d)$.
Si on peut rendre simultanément $m - u$ maximum et $c - d$ maximum, on obtient alors la valeur maximum de D.
Or $m - u$ est maximum lorsque $m = 9$ et $u = 1$ et $c - d$ est maximum lorsque $c = 8$ et $d = 2$.
La valeur maximum de D est donc égale à $999 \times (9 - 1) + 90 \times (8 - 2)$ c'est-à-dire à 8532 et est obtenue lorsque $N = 9821$.

7°) (0,5 point + 0,5 point) $D = 999(m - u) + 90(c - d)$.
Si on peut rendre simultanément $m - u$ minimum et $c - d$ minimum, on obtient alors la valeur minimum de D.
Or la valeur minimum de $m - u$ est égale à 3 et la valeur minimum de $c - d$ est égale 1.
La valeur minimum de D est donc égale à $999 \times 3 + 90 \times 1$ c'est-à-dire à 3087 et est obtenue lorsque $N = 9876$ ou $N = 8765$ ou $N = 7654$ ou $N = 6543$ ou $N = 5432$ ou $N = 4321$.

Question complémentaire (3,5 points)

1°) (0,5 point) Il s'agit d'un exercice de calcul réfléchi portant sur des décompositions additives de nombres inférieurs à 1000. C'est donc un exercice qui correspond aux compétences travaillées au **cycle 2 niveau CE1**.

Remarque : le fait de devoir élaborer une stratégie pour minimiser le nombre de plaques rend cet exercice difficile et **on peut aussi accepter comme réponse à cette question la réponse "cycle 3 niveau CE2" si cette réponse est accompagnée d'une justification.**

2°)

Question 1 (1 point)

Dans le domaine de la numération des entiers

Farid comprend la signification des écritures chiffrées utilisées dans notre système de numération décimale.

Dans le domaine du calcul

Farid sait utiliser des relations entre les nombres 5, 10, 25, 50 et 100 et effectuer des calculs additifs.

Dans le domaine de la résolution de problèmes

Farid sait exposer ses résultats en respectant une consigne donnée de présentation ("Dessine toutes les plaques que tu as utilisées).

Question 2 (1 point)

Les décompositions additives proposées par Farid pour les nombres 160 et 75 sont exactes mais ne sont pas "minimales" (elles ne respectent pas la consigne "Compose les nombres **avec le moins de plaques possibles**").

Remarque : la décomposition proposée pour le nombre 180 est minimale.

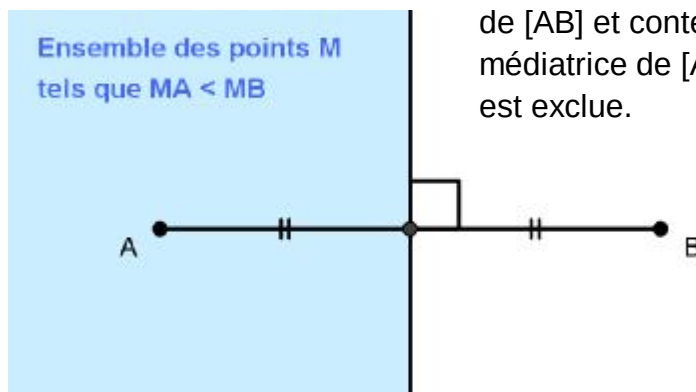
Question 3 (1 point)

Hypothèses :

- **Farid n'a pas vu ou pas compris la contrainte portant sur le nombre de plaques, contrainte** qui est exprimée dans une phrase de consignes comportant deux contraintes.
- **Farid n'a pas su gérer simultanément les deux contraintes imposées.**
- Farid sait effectuer des calculs additifs portant sur les nombres 5, 10, 25, 50 et 100 mais **il ne maîtrise peut-être pas suffisamment certaines décompositions fondées sur ces nombres comme par exemple $60 = 50 + 10$ ou $150 = 50 + 50 + 50$ ou $75 = 25 + 25 + 25$** (remarque : on peut supposer que la donnée des plaques 100 pour le nombre 180 a participé à la réussite de Farid pour cet item)

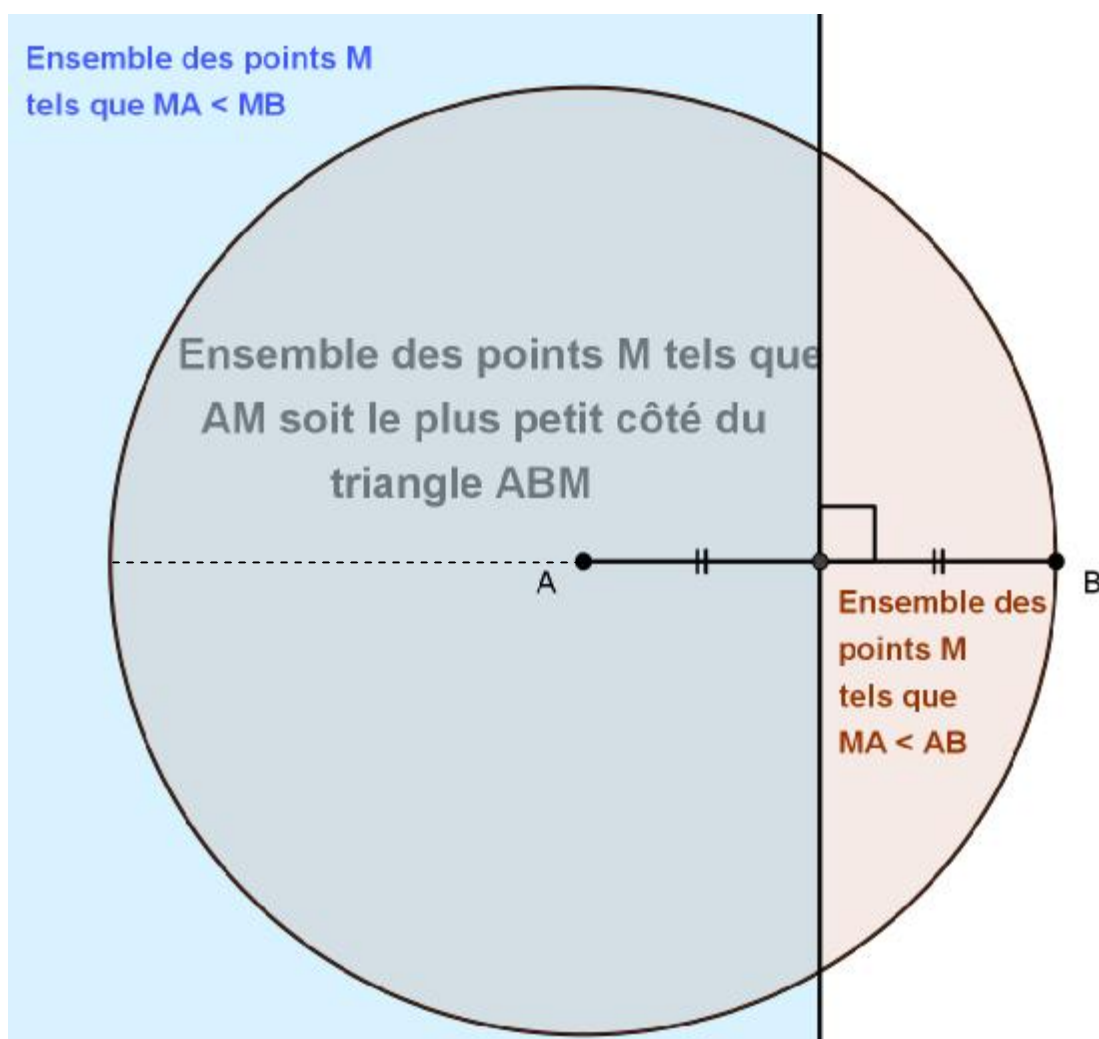
Exercice 2 (5,5 points)

1°) a) (0,5 point)



L'ensemble des points M qui conviennent est le demi-plan délimité par la médiatrice de $[AB]$ et contenant le point A (la médiatrice de $[AB]$, frontière du demi-plan, est exclue).

b) (1 point)



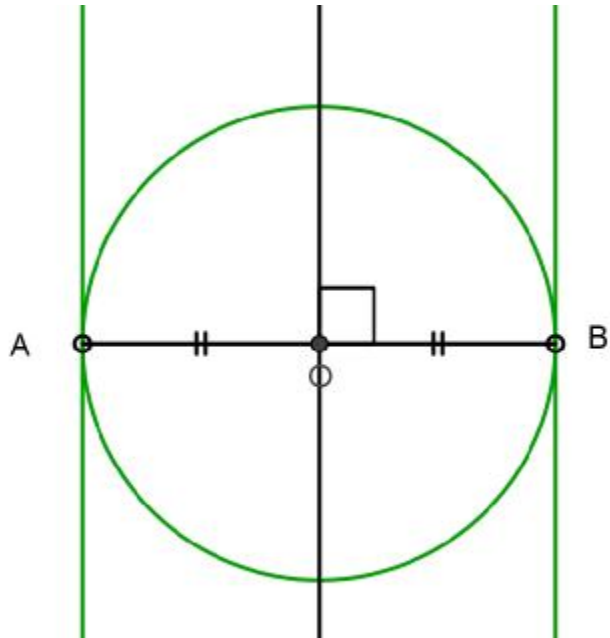
L'ensemble des points M qui conviennent est la partie du disque de centre A et de rayon $[AB]$ située dans le demi-plan délimité par la médiatrice de $[AB]$ et contenant le point A.

Remarques :

- les frontières (partie du cercle et partie de la médiatrice de $[AB]$) sont exclues
- si on veut que ABM soit "un vrai triangle", il faut ôter les points situés sur la droite (AB)

c)(1 point)

L'ensemble cherché se compose de l'ensemble obtenu en réunissant le cercle de diamètre $[AB]$ (le triangle ABM est alors rectangle en M), la droite perpendiculaire à (AB) en A (le triangle ABM est alors rectangle en A) et la droite perpendiculaire à (AB) en B (le triangle ABM est alors rectangle en B) et en ôtant à cet ensemble les points A et B .

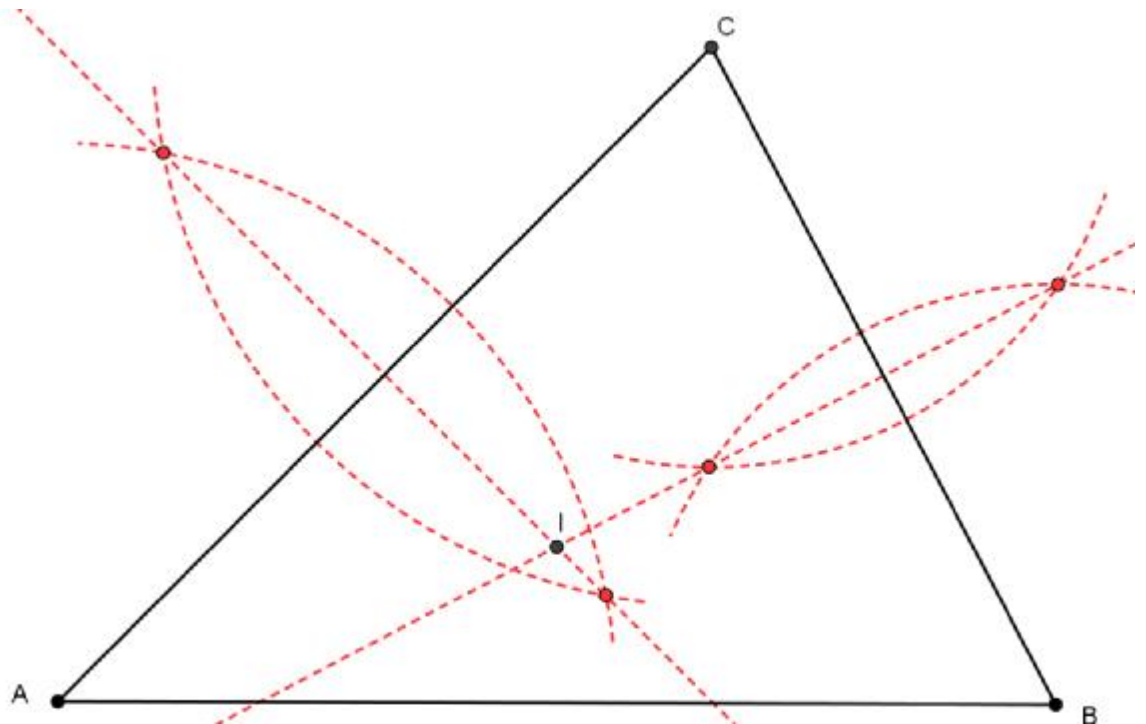


2°) a) (0,5 point + 0,5 point)

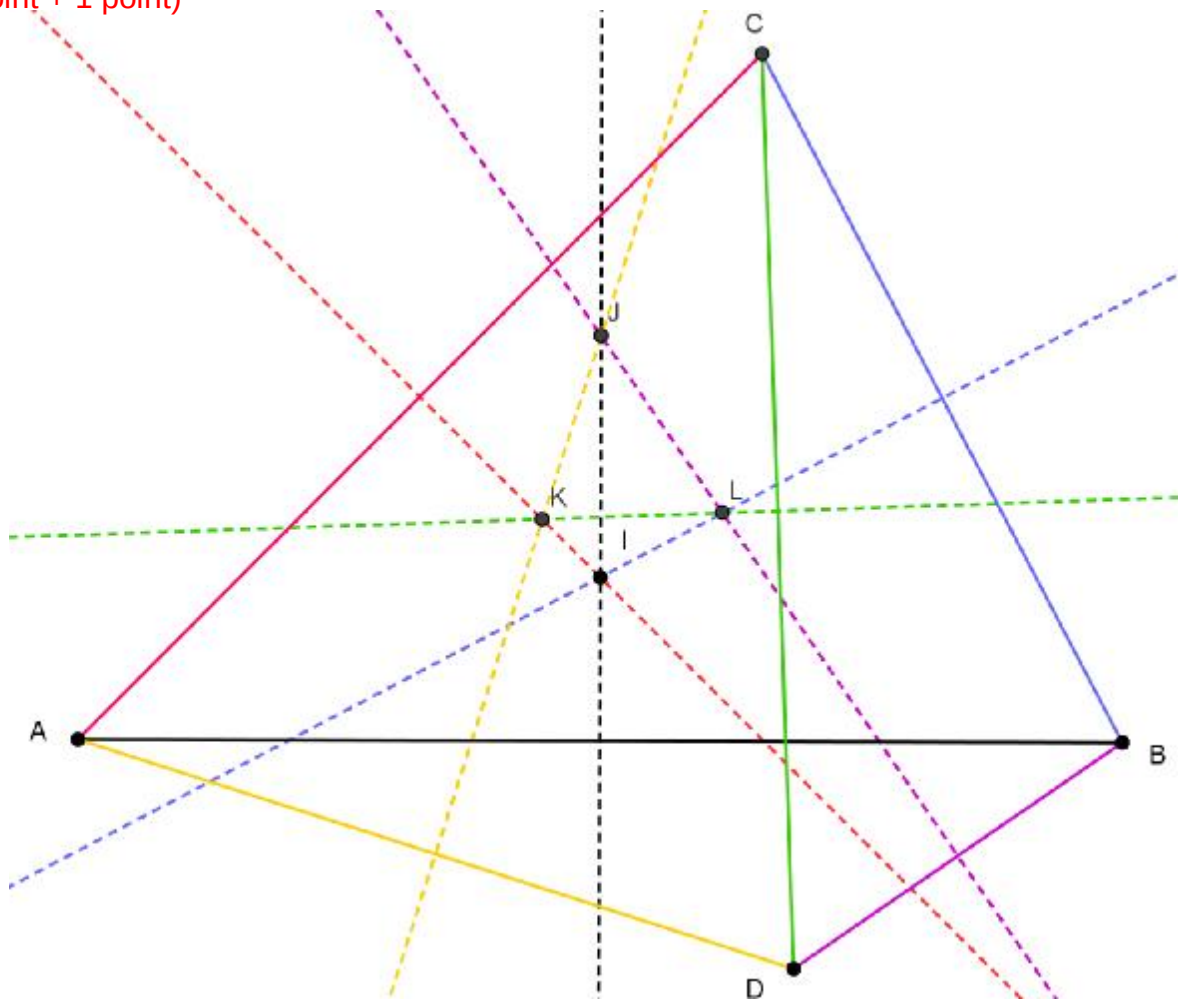
L'ensemble des points I tel que $IA = IB$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

L'ensemble des points I tels que $IB = IC$ est la médiatrice du segment $[BC]$. Les points A , B et C n'étant pas alignés les droites précédentes ne sont pas parallèles et se coupent donc en un point unique. **Il existe donc un seul point I du plan tel que $IA = IB = IC$**

Construction du point I :



b) (1 point + 1 point)



On sait que $IA = IB = IC$ et que $JA = JB = JD$.

Si I et J sont confondus alors $IA = IB = IC = ID$.

Comme K est l'unique point du plan tel que $KA = KC = KD$ et comme $IA = IC = ID$, on en déduit que I et K sont confondus.

Comme L est l'unique point du plan tel que $LB = LC = LD$ et comme $IB = IC = ID$, on en déduit que I et L sont confondus.

Conclusion : **si I et J sont confondus alors I, J, K et L sont confondus.**

Dans ce cas, $IA = IB = IC = ID$ **donc A, B, C et D sont cocycliques** (A, B, C et D appartiennent à un même cercle de centre I).

Question complémentaire (4,5 points)

1°) (0,5 point) L'activité proposée présente de réelles difficultés notamment en ce qui concerne la rédaction du programme de construction. Les élèves devront nécessairement savoir désigner le segment [OA] et la droite (AB), employer des expressions compliquées ("perpendiculaire à ... passant par ...", "cercle de centre ... et de rayon ...). Ils devront trouver un moyen de caractériser la position du point C sur le segment [OA] car les longueurs OC et AC ne peuvent pas se déduire de longueurs déjà construites et ne sont pas égales à un nombre entier de centimètres.

Cette activité peut être proposée en fin de cycle 3, au CM2.

2°) (1,5 point) Compétences mathématiques particulières que cette activité met en œuvre (propositions de réponse tirées des I.O. 2008) :

- **Utiliser en situation le vocabulaire géométrique** (droite, droites perpendiculaires, segment, centre d'un cercle, rayon, diamètre)
- **Mesurer des segments** (pour situer le point C sur [OA])
- **Décrire une figure**
- **Utiliser des instruments pour réaliser des tracés**

3°) (1 point)

Propositions d'aménagements pour simplifier la tâche :

- simplifier la figure en plaçant par exemple C au milieu de [OA]
- donner la figure sur papier quadrillé avec les points O, A et B sur des nœuds du quadrillage et demander la reproduction sur papier quadrillé
- donner une ou deux étapes supplémentaires du programme de construction
- donner plusieurs programmes de construction et demander aux élèves de trouver celui qui correspond à la figure
- simplifier la reproduction en donnant [AB] et O déjà tracés, avec la même orientation que sur le modèle
- faire travailler les enfants à deux pour la rédaction du programme.

Propositions d'aménagements pour complexifier la tâche :

- complexifier la figure en supprimant la droite (DE) ou la droite (AB)
- ne pas donner le début du programme de construction
- imposer un début de programme différent (par exemple : "Trace un segment [AB] de longueur 4 cm)
- demander aux élèves de reproduire la figure à partir du programme de construction qu'ils ont rédigé sans avoir le modèle sous les yeux.

4°) (1,5 point)

Eléments pertinents pouvant être pris en compte pour évaluer le programme de construction :

- précision du vocabulaire géométrique utilisé
- la détermination du point C est correcte
- le programme de construction donne bien la figure souhaitée
- pertinence des outils employés (exemple : il n'est pas acceptable de dire "Trace un point E sur le cercle à 1,5 cm de A avec ta règle graduée")

Eléments pertinents pouvant être pris en compte pour évaluer la reproduction de la figure :

- les mesures de longueurs sont correctes (rayon du cercle, position du point C)
- les droites (DE) et (AB) sont bien perpendiculaires
- exactitude du tracé (superposition avec un modèle sur calque)
- soin des tracés

Exercice 3 (1,5 points)

Première méthode :

36 054 est divisible par 2 (car 4 est un nombre pair) et 36 054 est divisible par 9 (car $3 + 6 + 0 + 5 + 4$ est divisible par 9).

De plus 2 et 9 sont des nombres premiers entre eux (autrement dit : 2 et 9 n'admettent pas d'autre diviseur commun que le nombre 1).

Donc 36 054 est divisible par 2×9 c'est-à-dire par 18.

Attention :

Si un nombre est divisible en même temps par 2 et par 9 alors ce nombre est divisible par 2×9 c'est-à-dire par 18 mais ceci est vrai car 2 et 9 sont premiers entre eux (2 et 9 n'ont pas d'autre diviseur commun que 1).

Mais ce n'est pas parce qu'un nombre est divisible en même temps par 4 et par 18 qu'il est nécessairement divisible par 72 car $4 \times 18 = 72$ mais 4 et 18 ne sont pas premiers entre eux (ils sont tous deux divisibles par 2). Et effectivement 36 est divisible par 4 et par 18 sans être divisible par 72.

Deuxième méthode :

$$36\,054 = 2 \times 18\,027 = 2 \times 9 \times 2\,003 = 18 \times 2\,003$$

Donc 36 054 est divisible par 2×9 c'est-à-dire par 18.